

Final Básico 2017

Problema 1. Decimos que un número de 4 dígitos es *apocalíptico* si tiene al menos un 0, un 1 y un 2 entre sus dígitos. Por ejemplo el 2012 es apocalíptico. Determina:

- El mayor número apocalíptico
- El menor número apocalíptico.
- Demuestra que no existe número apocalíptico que sea múltiplo de 101.

Solución.

- 9210 es el mayor número apocalíptico
- 1002 es el menor número apocalíptico
- Los números múltiplos de 101 de 4 dígitos son de la forma $abab$, en donde es imposible que haya un 0, un 1 y un 2, por lo tanto no existe número apocalíptico que sea múltiplo de 101.

Problema 2. Una calculadora tiene dos teclas especiales: A y B . La tecla A transforma el número x que está en la pantalla en el número $\frac{1}{x}$. La tecla B transforma el número x que está en la pantalla en el número $1 - x$. Un alumno tiene en la pantalla de su calculador cierto número y aprieta sucesivamente las teclas A y B , de la siguiente forma

$$\underbrace{A, B, A, B, A, B, \dots, A, B}_{500 \text{ veces } A \text{ y } 500 \text{ veces } B}$$

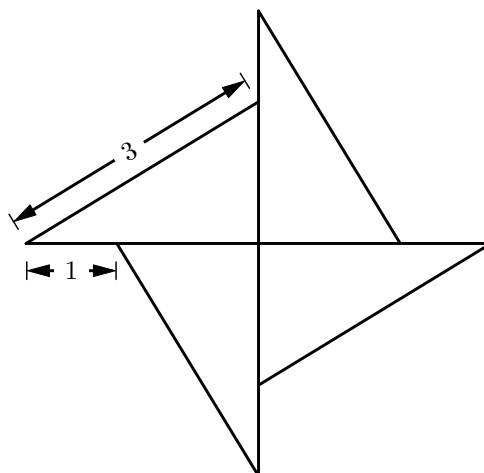
Y obtiene al final el número $-\frac{1}{2017}$. ¿cuál es el número que tenía el alumno al inicio?

Solución. Es fácil confirmar que el número x después de presionar la secuencia (A, B, A, B, A, B) se convierte en $(\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}, -\frac{1}{x-1}, 1-x, x)$, respectivamente. Entonces podemos considerar que la secuencia de seis teclas (A, B, A, B, A, B) no tiene ningún efecto sobre el número inicial.

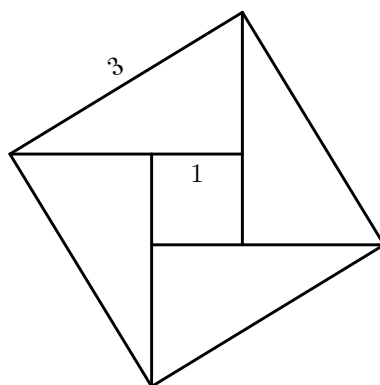
Por lo tanto, como 996 es múltiplo de 6, la secuencia de 1000 letras equivale simplemente a (A, B, A, B) . Pero ya sabemos que si empezamos con el número x y aplicamos esa secuencia de 4 letras obtenemos $-\frac{1}{x-1}$, luego:

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2017} \implies x = 2018.$$

Problema 3. Cuatro triángulos rectángulos congruentes forman la figura mostrada. Encuentre el área de uno de los triángulos.



Solución. Si reubicamos estratégicamente los triángulos rectángulos para que formen un cuadrado de 3×3 con un cuadrado interior de 1×1 , nos daremos cuenta que el área de 4 triángulos es $3^2 - 1^2 = 8$. Entonces el área de uno de los triángulos es 2.



Problema 4. Adrián y Tania juegan un juego. Juegan turnos alternados, con Adrián empezando. Al comienzo del juego, hay 20 galletas en un plato rojo y 14 en un plato azul. Un movimiento permitido consiste en comer dos galletas de un solo plato, o mover una galleta del plato rojo al plato azul (pero nunca del plato azul al plato rojo). El ultimo jugador en hacer un movimiento permitido gana; en otras palabras, si es tu turno y no puedes hacer un movimiento permitido, perdiste, y el otro jugador ha ganado. ¿Cual jugador tiene la estrategia ganadora?

Solución. Escribamos el número de galletas en el plato rojo y azul, respectivamente, como un par ordenado (x, y) , así, los movimientos permitidos son $(x - 2, y)$ o $(x, y - 2)$ o $(x - 1, y + 1)$. Eso hace que las únicas posiciones sin movimientos permitidos sean $(0, 0)$ y $(0, 1)$, y dado que las galletas son comidas en pares, la posición final está determinada por el número original de galletas.

Empezando desde $(20, 14)$, sabemos que eventualmente todas las galletas serán comidas, entonces hay exactamente $\frac{20+14}{2} = 17$ movimientos “come-galletas”. También puede haber algunos movimientos del primer plato al segundo, pero dado que se van a comer un número par de galletas en cada plato, debe haber un número par de este tipo de movimientos. En

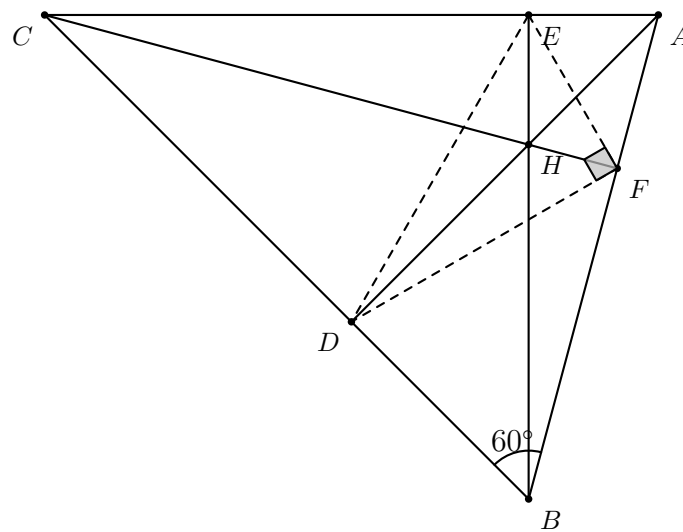
consecuencia, el número total de movimientos es impar, y el primer jugador tiene el último movimiento permitido. Adrián tiene la estrategia ganadora.

Problema 5. Un triángulo acutángulo cumple que sus ángulos están en progresión aritmética, además, los pies de sus alturas son los vértices de un triángulo rectángulo. Halla el mayor ángulo del triángulo inicial.

Solución. Sea ABC el triángulo acutángulo y supongamos que los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$, están en progresión aritmética, entonces $\angle B = \frac{\angle A + \angle C}{2}$ y como $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, entonces $\angle B = 60^\circ$. Sean AD, BE y CF las alturas que concurren en el punto H .

Observemos que los cuadriláteros $AFHE, BDHF$ y $CEHD$ son cíclicos. Entonces $\angle FEH = \angle BAD = 30^\circ$ y $\angle HED = \angle FCB = 30^\circ$, luego, $\angle FED = 60^\circ$.

Por dato, el triángulo DEF es rectángulo, entonces sea (sin pérdida de generalidad) $\angle EFD = 90^\circ$. Luego, como $\angle HFE = \angle HAE = \angle EBC = \angle DFH$ concluimos que $\angle HFE = \angle DFH = 45^\circ$, entonces $\angle HBD = 45^\circ = \angle BCA$. En consecuencia, los ángulos del triángulo inicial son $60^\circ, 75^\circ$ y 45° , luego el mayor ángulo del triángulo inicial es 75° .



Problema 6. En la boletería del estadio Monumental, solo se reciben monedas de \$2 y \$5. Al inicio del día no había dinero en la caja y al final del día la recaudación total fue de \$ 1003. Demuestre que se puede escoger un grupo de monedas cuyo valor total sea exactamente \$199.

Solución. Sea a la cantidad de monedas de \$2 y b la cantidad de monedas de \$5, entonces $2a + 5b = 1003$. De la ecuación anterior podemos concluir que a es un múltiplo de 5 mas 4, en particular, tenemos que $a \geq 4$. También b es impar, con lo cual tenemos que $b \geq 1$.

Hasta ahora tenemos con seguridad monedas de 2, 2, 2, 2, 5 (que suman 13), entonces el valor de todas las otras monedas en conjunto es \$990.

Si hay m monedas de \$2 y n de \$5, tendríamos que $2m + 5n = 990$ y como 990 es múltiplo

de 10, entonces m es múltiplo de 5 y n es par. Si $m = 0$ todas las monedas son de \$5 y si m es positivo, entonces $m \geq 5$, en el primer caso escogemos dos monedas de \$5 y en el segundo caso escogemos cinco monedas de \$2, es decir, en ambos casos se puede escoger un grupo de monedas cuyo valor sea exactamente \$10.

Tenemos ahora \$ 980 y, como 980 es múltiplo de 10, podemos hacer lo mismo que el párrafo anterior, es decir, conseguimos otro grupo de monedas cuyo valor sea exactamente \$10. Seguimos con este proceso hasta que se acaban las monedas.

Por lo tanto, podemos conseguir 99 grupos de \$10 y las monedas “sueltas” de \$2, \$2, \$2, \$2, \$2 y \$5. Para conseguir un grupo de monedas cuyo valor sea exactamente \$199, tomamos 19 grupos de \$10 y las monedas de \$2, \$2 y \$5.